（科目：　　　）**数　学　作　业　纸**

编号：　　　　班级：　　　　姓名：　　　　第 1 页

0、统计量；数字特征；参数估计；假设检验.

1. 均值 = mean(x)；中位数 = median(x)；极差 = range(x)
相关系数 = corrcoef(x, y)；协方差阵 = cov(x, y)
方差 = var(x)，标准差 = std(x)，有偏标准差 = std(x, 1).
} 样本的统计量

2. $[\mu, \sigma^2]$ = …stat(参)，随机数 = …rnd(参, 个数).
$f(x_0)$ = …pdf(x_0, 参)；$F(x_0)$ = …cdf(x_0, 参)；x_0 = …inv($F(x_0)$, 参).
} 分布的数字特征

3. 正态总体参数估计
$[\mu, \sigma, \mu ci, \sigma ci]$ = normfit(x, α)

4. 正态总体假设检验（h=0 接受；=1 拒绝　flag=0 : = ；=1 : < ；=-1 : >）

假设检验	统计量	检验规则	实现
单μ（σ^2 已知）	$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	双：$\lvert z\rvert \le u_{1-\alpha/2}$ 单：$z \gtrless \begin{matrix} u_\alpha \\ u_{1-\alpha} \end{matrix}$	[h, pval, μci, zval] = ztest(x, μ, σ, α, flag)
单μ（σ^2 未知）	$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	双：$\lvert t\rvert \le t_{1-\alpha/2}$ 单：$t \gtrless \begin{matrix} t_\alpha \\ t_{1-\alpha} \end{matrix}$	[h, pval, μci] = ttest(x, μ, α, flag).
单σ	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	双：$\chi^2_{\alpha/2} \le \chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}$ 单：$\chi^2 \gtrless \begin{matrix} \chi^2_\alpha \\ \chi^2_{1-\alpha} \end{matrix}$	h = chi2test(x, σ, α, flag)
双μ（σ_1^2, σ_2^2 已知）	$z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	双：$\lvert z\rvert \le u_{1-\alpha/2}$ 单：$z \gtrless \begin{matrix} u_\alpha \\ u_{1-\alpha} \end{matrix}$	h = ztest2(x, y, σ1, σ2, α, flag)
双μ（σ_1^2, σ_2^2 未知）	$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1}+\frac{s^2}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$ $s^2 = \cdots$	双：$\lvert t\rvert \le t_{1-\alpha/2}$ 单：$t \gtrless \begin{matrix} t_\alpha \\ t_{1-\alpha} \end{matrix}$	[h, pval, μci] = ttest2(x, y, α, flag).
双σ	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	双：$S_1^2 \ge S_2^2$ 时 $F \le F_{1-\alpha/2}$	h = ftest2(x, y, α ~~flag~~)
0-1分布μ	$z=\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$	双：$\lvert z\rvert \le u_{1-\alpha/2}$ 单：$z \gtrless \begin{matrix} u_\alpha \\ u_{1-\alpha} \end{matrix}$	h = zotest(x, p, α, flag).

mvnrnd(μ, Σ, N).

（科目：　　　）数　学　作　业　纸

编号：　　　班级：　　　姓名：　　　第 2 页

一、插值、数值积分

1. 拉格朗日多项式插值	y = lagr(x₀, y₀, x)
2. 分段线性插值：	y = interp1(x0, y0, x)
3. 三次样条插值：	y = spline(x0, y0, x)

1. 梯形积分：分段线性插值	S = trapz(x, y), trapz(y)	2阶收敛
2. 抛物线积分：分段二次插值：辛普森	S = quad('f', a, b, tol)	4阶收敛.
3. 随机投点法：	$S = \frac{m}{n} \cdot A$	$n^{-\frac{1}{2}}$阶精度
4. 均值估计法：	$S = \frac{1}{n} \cdot A \cdot \sum_{i=1}^{m} f(x_i)$	$n^{-\frac{1}{2}}$阶精度.

二、数值求导，常微分方程(组)

1. 前差求导：n→n-1	y' = diff(y)	1阶精度.
2. 三点求导：n→n	y' = diff2(y)	2阶精度.

1. 向前欧拉	局误 $O(h^2)$	$h \le \frac{2}{\lambda}$稳	显式	1阶精度
2. 向后欧拉	局误 $O(h^2)$	恒稳	隐式	1阶精度
3. 梯形公式	局误 $O(h^3)$	—	隐式	2阶精度
4. 改进欧拉	局误 $O(h^3)$	—	显式	2阶精度
5. 3级2阶 R-K	局误 $O(h^3)$	—	显式 (x, y)=ode23(@f, x0, y0, opt, 参)	2阶精度
6. 5级4阶 R-K	局误 $O(h^5)$	$h \le \frac{2.785}{\lambda}$稳.	显式 $y' = f(x, y)$ …	4阶精度.

三、线性方程组，常差分方程(组)

1. 直接法(中小型)：$x = A\backslash b$ ； $A = LU$, $Ly = b$, $Ux = y$

1) A可逆，且顺序主子式≠0	[L, U] = lu(A)
2) A可逆，且顺序主子式=0	[L, U, P] = lu(A)
3) A可逆，且顺序主子式≠0，对角阵	[L, U, x] = catchup(A, b)
4) A对称正定：$U = L^T$	L = chol(A).

2. 迭代法(大型、病态、稀疏)：$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$, $x^{(k)} - x^* = B^k(x^{(0)} - x^*)$ | $\rho(B) < 1 \Leftrightarrow$ 收敛.

$\rho(B) = $ max(abs(eig(B)))

1) 雅可比迭代	$B=D^{-1}(L+U)$, $f=D^{-1}b$	[x,time,B]=J(A,b,x_0,maxiter,tol)	收敛：$\lvert a_{ii}\rvert>\sum_{j\neq i}\lvert a_{ij}\rvert$
2) 高斯…迭代	$B=(D-L)^{-1}U$, $f=(D-L)^{-1}b$	[x,time,B]=G(A,b,x_0,tol)	收敛：$\lvert a_{ii}\rvert>\sum_{j\neq i}\lvert a_{ij}\rvert$，对称正定
3) 超松弛迭代	$B=B(\omega)$, $f=f(\omega)$	·····= S(A,b,x_0,w,tol)	收敛：$0<\omega<2$，对称正定

注1：$A=D-L-U$, $D=diag(diag(A))$, $U=-triu(A,1)$, $L=-tril(A,-1)$.

注2：范数 = norm(x,阶)

条件数 = cond(x,阶) ≥ 1

条件数 >> 1 则病态

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le \frac{cond(A)}{1-cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

注3：稀疏矩阵：

S = sparse(i,j,val,m,n); SS = full(S).

四. 非线性方程(组)：无约束优化(求极小)： $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，直到 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$：p阶收敛.

1. 牛顿(切线)法：$\varphi(x_k)=x_k-f(x_k)/f'(x_k)$	[x,num]=newton('f','df',x_0,n,tol)	单根2阶收敛，重根1阶.
2. 牛顿(割线)法：$\varphi(x_k)=x_k-f(x_k)\Big/\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$		单根1.6阶收敛.
3. 拟牛顿(切线)法：——		≥1阶收敛
4. 拟牛顿(割线)法：——		—
5. 一元函数值零点：二分法、插值法··	[x,fv]=fzero(@f,x_0,opt,参)	—
6. 非线性方程组：置信域法…	[x,fv]=fsolve(@f,x_0,opt,参)	—
7. 单变量代数方程：	root = roots(降幂系数)	—
1. 有界单变量优化：插值法…	[x,fv]=fminbnd(@f,v_1,v_2,opt,参)	求导数方程的根
2. 无约束优化：拟牛顿法、置信域法··	[x,fv]=fminunc(@f,x_0,opt,参)	
3. 无约束优化：单纯形法(不用梯度)	[x,fv]=fminsearch(@f,x_0,opt,参)	

五. 多元线性回归；一元多项式回归；多元二项式回归；非线性回归.

1. 残差 $\hat{\varepsilon}_i = e_i = y_i - \hat{y}_i$

2. 残差平方和 $Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$

3. 回归平方和 $U = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$

4. 总偏差平方和 $S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = U + Q$

5. 剩余方差： $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{Q}{n-m-1}$. m：元；$n-m-1$：Q的自由度

6. 决定系数： $R^2 = U/S \in (0,1)$.

1. 线性回归 $\beta = (\Phi^T(x)\cdot\Phi(x)) \backslash (\Phi^T(x)\cdot y)$. 预测区间 $\approx [\hat{y}_0 - u_{1-\alpha/2} s, \hat{y}_0 + u_{1-\alpha/2} s]$.

1) 多元线性回归　　rcoplot (e, eci).

$[\beta, \beta ci, e, eci, [R^2, F, p\{F(1, n-m-1) > Fval\}, s^2]] = \text{regress}(y, X, \alpha)$.

2) 一元多项式回归：降幂

β = polyfit (x, y, m)

$\beta, \beta ci, e \Leftarrow$ polytool (x, y, m, α)

3) 多元二项式回归：升幂

$\beta, s, e \Leftarrow$ rstool (x, y, 'model', α)

2. 非线性回归

1) [β, 误差平方和, 误差向量] = lsqnonlin (@F, β₀, V_1, V_2, opt, 参).

误差向量 = F(β, 参)

2) [β, 误差平方和, 误差向量] = lsqcurvefit (@F, β_0, x, y, V_1, V_2, opt, 参)

$y = F(\beta, x)$.

以上皆基于最小二乘准则，故仍属无约束优化的范畴.

五. 线性规划；非线性规划.

1. 线性规划： $\min z = c^T x$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t. } & A_1 x \le b_1 \to \lambda.\text{ineqlin} \\
& A_2 x = b_2 \to \lambda.\text{eqlin} \\
& v_1 \le x \le v_2 \to \lambda.\text{lower}, \lambda.\text{upper}.
\end{aligned}
$$

起作用约束，$\lambda \ne 0$
不…约束，$\lambda = 0$
$\Delta z = \lambda \Delta b_{1,2}$

$[x, fv, \sim, \sim, \lambda] = \text{linprog}(c, A_1, b_1, A_2, b_2, v_1, v_2, x_0, opt, 参)$;

单纯形法、有效集法，内点法

2. 二次规划： $\min z = \frac{1}{2} x^T H x + c^T x$ → 非对角元直接填入；主对角元乘2填入.H.

$$
\begin{aligned}
\text{s.t. } & A_1 x \le b_1 \\
& A_2 x = b_2 \\
& v_1 \le x \le v_2
\end{aligned}
$$

$[x, fv\ \lambda \ldots] = \text{quadprog}(H, c, A_1, b_1, A_2, b_2, v_1, v_2, x_0, opt, 参)$

置信域法，有效集法.

3. 非线性规划： $\min z = f(x)$ → @f　$[e, \nabla f, \nabla^2 f] = f(x)$: opt.GradObj, opt.Hessian

$$
\begin{aligned}
\text{s.t. } & \left.\begin{aligned} & c_1(x) \le 0 \\ & c_2(x) = 0 \end{aligned}\right\} \to @c \quad [c_1, c_2, \nabla c_1, \nabla c_2] = c(x) : \text{opt.GradConstr} \\
& A_1 x \le b_1 \\
& A_2 x = b_2 \\
& v_1 \le x \le v_2
\end{aligned}
$$

$[x, fv \ldots] = \text{fmincon}(@f, x_0, A_1, b_1, A_2, b_2, v_1, v_2, @c, opt, 参)$.

置信域法，逐步二次规划法.